PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER INTERVAL DENGAN METODE DEKOMPOSISI *LU*

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

YULIA DEPEGA
10854003936

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER INTERVAL DENGEN METODE DEKOMPOSISI *LU*

YULIA DEPEGA
10854003936

Tanggal Sidang : 28 September 2012
Tanggal Wisuda : November 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Sistem persamaan linier (SPL) merupakan suatu persamaan linier yang terdiri atas *m* persamaan dan *n* variabel, yang dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks $AX = B$. Koefisien-koefisien pada sistem persamaan linear ada yang berbentuk bilangan riil, ada yang berbentuk bilangan kompleks dan ada yang berupa interval . Sistem persamaan linear dengan koefisien berupa interval dapat diselesaikan dengan metode dekomposisi LU. Metode dekomposisi LU merupakan suatu metode yang memfaktorkan suatu matriks koefisien A menjadi perkalian dua matriks yaitu matriks segitiga bawah (*lower*) dan segitiga atas (*upper*), yang disebut matriks L dan matriks U sehingga menjadi $A = LU$. Solusi yang diperoleh dari sistem persamaan linear interval adalah solusi tunggal.

Katakunci: Dekomposisi LU, sistem persamaan linear interval.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas akhir dengan judul **"PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER INTERVAL DENGAN METODE DEKOMPOSISI *LU*"**. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at-Nya dan selalu dalam lindungan Allah SWT amin. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at dan dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku pembimbing tugas akhir yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

6. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 28 September 2012

Yulia Depega

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linier (SPL) merupakan suatu persamaan linier yang terdiri atas *m* persamaan dan *n* variabel. SPL tersebut mempunyai koefisien-koefisien yang berupa bilangan riil atau bilangan kompleks. Selain itu juga ada koefisien-koefisien dari persamaan linier berupa interval. Persamaan linier tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks supaya lebih mudah dalam menyelesaikan suatu SPL yang diberikan.

Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai dari variabel-variabel yang memenuhi semua persamaan linier yang diberikan. Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan menggunakan beberapa metode salah satunya adalah metode dekomposisi LU (*Lower Upper*). Metode ini dinilai lebih efisien dalam penghitungan solusi sistem persamaan linier berukuran besar, dengan hasil mendekati nilai eksaknya. Dekomposisi LU merupakan pemfaktoran matriks koefisien menjadi dua matriks, yaitu matriks segitiga bawah (*upper triangular*) yang biasa disebut dengan matriks U dan matriks segitiga atas (*lower triangular*) yang disebut dengan matriks L, dengan dimensi atau ukuran matriks L dan U harus sama dengan dimensi matriks A, dengan kata lain $A = LU$. Sehingga dari matriks L dan U tersebut, dapat diperoleh nilai dari variabel-variabel yang memenuhi semua persamaan linier.

Penyelesaian SPL dengan metode dekomposisi LU telah dibahas sebelumnya oleh beberapa peneliti, seperti penelitian yang dilakukan oleh Nuh Akbar dkk tahun 2006, pada jurnal yang berjudul ”Algoritma *Dollit dan Crout dalam Dekomposisi* LU*”.* Selajutnya penelitian yang dilakukan oleh Achmad Dimas tahun 2011, yang berjudul “Penggunaan Metode Dekomposisi LU Untuk Penentuan Produksi Suatu Industri dengan Model Ekonomi Leontief”. Penyelesaian SPL interval sebelumnya juga pernah dibahas oleh Sergey P. Shary tahun 2001 yang berjudul “Metode Gauss Seidel untuk Menyelesaikan SPL

Interval". Selanjutnya penyelesaian SPL interval juga dibahas oleh K. Ganesan tahun 2007 yang berjudul "Beberapa Sifat Matriks Interval", dalam penelitan tersebut terdapat penyelesaian SPL interval dengan menggunakan aturan Cramer. Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, maka penulis tertarik untuk mengulas sebuah jurnal yang berjudul " *A Generalized Interval LU Decomposition for the Solution of Interval Linear System''* karangan Alexandra Goldsztejn dan Gilles Chabert yang membahas tentang Metode dekomposisi LU untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linier interval. Berdasarkan hal tersebut, maka penulis mengambil judul "**Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Interval dengan Menggunakan Dekomposisi LU**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah "Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linier interval dengan metode dekomposisi LU".

1.3 Batasan Masalah

Agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat, maka diperlukan adanya batasan masalah, diantaranya sebagai berikut:

1. Menggunakan matriks yang berukuran nxn
2. Menggunakan metode dekomposisi LU, untuk pemfaktoran matriks L dan U menggunakan dekomposisi dollit.

1.4 Tujuan dan Manfaat

1. Tujuan

Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linier interval dengan metode dekomposisi LU.

2. Manfaat

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut :

a. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika mengenai koefisien dari SPL yaitu koefien berupa interval.
b. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi SPL, khususnya cara menyelesaikan sistem persamaan linier interval dengan menggunakan metode dekomposisi LU.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada proposal tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang mendukung tentang dan memahami komponen-komponen yang ada hubungannya dengan penelitian ini.

Bab III Metodologi

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier interval dengan menggunakan metode dekomposisi LU.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan pembahasan mengenai pemaparan cara-cara dengan teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian tersebut.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab II berisikan teori-teori atau materi pendukung untuk melakukan pembahasan dalam penyusunan tugas akhir. Teori-teori tersebut adalah sistem persamaan linier, matriks, metode-metode dalam penyelesain SPL, koefisien interval, operasi aritmatika interval, dan determinan pada matriks interval.

2.1 Sistem Persamaan Linier (SPL)

Definisi 2.1 (Marc lipson, 2006) Sistem persamaan Persamaan Linier adalah sekumpulan persamaan linier dengan variabel-varibel yang tidak diketahui. Secara khusus SPL yang terdiri dari *m* persamaan $L_1, L_2, \cdots, L_m$ dengan *n* variabel tidak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Dengan $a_{11}, a_{12}, \cdots a_{mn}$ dan b_m adalah konstanta-konstanta bilangan riil. Sistem persamaan tersebut dapat dituliskan secara singkat dalam bentuk:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = bi$, untuk *i* = 1, 2, …, *m*. dengan $x_1, x_2, \dots, x_j$ adalah variabel-variabel yang tidak diketahui nilainya, dan $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ adalah koefisien-koefisien dari sistem persamaan tersebut, sedangkan $b_1, b_2, \dots, b_m$ adalah konstanta.

Sistem persamaan linier dikatakan konsisten (*consistent system*) jika sistem tersebut mempunyai solusi, baik solusi tunggal maupun solusi banyak. Untuk sistem persamaan linier yang tidak mempunyai solusi, maka sistem persamaan linier tersebut dikatakan inkonsisten (*inconsistent system*).

2.2 Matriks

Definisi 2.2 (Anton. H, 2000) Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut entri dari matriks.

Entri-entri dari matriks dapat berupa skalar atau bilangan, yaitu bilangan kompleks ataupun bilangan riil. Matriks dengan entri bilangan kompleks kita sebut dengan matriks kompleks. Lambang dari suatu matriks menggunakan huruf kapital dan huruf kecil untuk menyatakan entri-entri atau elemen-elemen dari matriks tersebut. Berdasarkan SPL tersebut, dapat dituliskan dalam bentuk notasi berikut $Ax = b$, atau

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sehingga dapat ditulis kedalam bentuk

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Suatu matriks dinamakan matriks segitiga atas (*upper triangular*) jika semua unsur segitiga bawahnya nol, dengan kata lain unsur yang tidak nol merupakan unsur diagonal atau unsur segitiga atas. Dan suatu matriks dinamakan matriks segitiga bawah (*lower triangular*) jika semua unsur segitiga atasnya nol. Suatu matriks dikatakan matriks diagonal jika matriks ini berbentuk bujursangkar (m = n) dan semua unsur yang bukan diagonalnya adalah nol, artinya $a_{ij} = 0$ jika $i \neq j$.

Contoh 2.1 :

Matriks segitiga atas (matriks A) dan matriks segitiga bawah (matriks B) :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2.3 Metode-Metode dalam Penyelesaian SPL

Penyelesaian suatu sistem persamaan linier adalah suatu himpunan nilai yang memenuhi secara serentak (*simultan*) semua persamaan-persamaan dari sistem persamaan linier yang diberikan. Secara sederhana penyelesaian sistem persamaan linier adalah menentukan titik potong dari beberapa persamaan linier. Ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk penyelesaian suatu sistem persamaan linier, yaitu sebagai berikut:

a. Aturan Cramer

b. Eliminasi Gauss

c. Metode Jacobi

d. Metode Dekomposisi LU.

Empat metode tersebut dijelaskan sebagai berikut:

a. Aturan Cramer

Penyelsaian SPL dengan menggunakan Cramer dilakukan tanpa melakukan OBE. Jika $Ax = b$ adalah suatu sistem persamaan dari *n* persamaan dan *n* variabel dengan maka nilai x dapat dicari dengan det ≠ 0, maka

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

dengan A_k adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke-*k* dari A dengan entri-entri pada matriks *b* = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

b. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss adalah suatu prosedur yang didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar dari suatu sistem menjadi matriks yang diperbesar lain yang cukup sederhana sehingga penyelesaian sistem dapat diperoleh hanya dengan melakukan operasi baris elementer (OBE) terhadap sistem tersebut. Dengan kata lain metode ini dilakukan dengan mereduksi matriks dengan cara OBE sehingga membentuk matriks segitiga bawah atau segitiga atas.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 & \cdots & a_{1n}x_n & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 & \cdots & a_{2n}x_n & b_2 \\ a_{31}x_1 & a_{32}x_2 & a_{33}x_3 & \cdots & a_{2n}x_n & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & a_{n3}x_3 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

menjadi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{2n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan nilai $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dapat dilakukan dengan cara substitusi mundur.

c. Metode Jacobi

Metode ini merupakan suatu teknik penyelesaian SPL berukuran *n x n*, $Ax = b$, secara *iterasi*. Proses penyelesaian dimulai dengan suatu hampiran awal terhadap penyelesaian, x_0, kemudian membentuk suatu serangkaian vector x_1, x_2, $\cdots$, x_n. Misalkan diberikan nilai awal $(x_1{}^0,\ x_2{}^0, \cdots, x_n{}^0)$ maka

$$x_i{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j{}^k\right] \text{ dengan } k = 1,2, \ldots .$$

d. Dekomposisi LU

Dekomposisi LU merupakan salah satu cara penyelesaian sistem persamaan linier dengan terlebih dahulu memfaktorkan matriks koefisien A menjadi dua buah matriks, yaitu matriks L dan U. Pemfaktoran matriks L dan U dapat dilakukan dengan beberapa metode, salah satunya yaitu metode dekomposisi dollit, dengan matriks pertama (L) adalah matriks segitiga bawah dengan semua diagonal bernilai satu, sedangkan matriks kedua (U) adalah matriks segitiga atas.

Metode dekomposisi LU pada penyelesaian SPL interval menggunakan aproksimasi solusi AE, dengan A merupakan matriks berukuran nxn dan E merupakan matriks elementer. Diberikan sebuah matriks persegi A yang non singular dapat difaktorkan (dekomposisi) menjadi perkalian dua matriks segitiga L (*lower*) dan U (*upper*), yakni menjadi $A = LU$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sehingga persamaan tersebut menjadi

$LU_x = b$

Langkah –langkah dekomposisi Dollit sebagai berikut:

1. Membentuk matriks koefisien A, matriks variabel dan matriks hasil b dari persamaan linier $Ax = b$
2. Mencari matriks segitiga bawah (L) dan matrik segitiga atas (U) dari matriks koefisien A dengan cara

   Untuk matriks U

   $U_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan

   $U_{ij} = a_{ij} - \sum_{k<i} L_{ik} U_{kj}$ untuk $i \leq j$,

   dan untuk matriks L

   $l_{ij} = 1$ untuk $i = j$, dan $l_{ij} = 0$ untuk $i > j$,

   $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k<i} L_{ik} U_{kj}$ untuk $i \leq j$.
3. Menentukan vektor y dengan cara menyelesaikan persamaan $Ly = b$, menentukan vektor *x* dengan persamaan $Ux = y$, dapat dilakukan dengan cara substitusi maju dan substitusi mundur.

Untuk lebih mudah memahami konsep tentang metode dekomposisi LU tersebut, maka diberikan contoh berikut:

Contoh 2.2 : Tentukanlah solusi dari sistem persamaan linier berikut dengan metode dekomposisi LU!

$2x1 + 6x2 + 2x3 = 2$

$-3x1 - 8x2 \qquad = 2$

$4x1 + 9x2 + 2x3 = 3$.

Penyelesaian:

Penyelesaian SPL dengan metode dekomposisi LU dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengubah SPL tersebut kedalam matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Dibentuk persamaan $A = LU$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix}.$$

3. Akan ditentukan matriks L dan matriks U dengan cara:

   a. Baris pertama

$$u_{11} = a_{11} = 2$$

$$u_{12} = a_{12} = 6$$

$$u_{13} = a_{13} = 2.$$

   b. Baris kedua

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{-3}{2}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -8 - \left({}^{-3}/_{2}\right) \cdot 6 = 1$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 0 - \left({}^{-3}/_{2}\right) \cdot 2 = 3.$$

   c. Baris ketiga

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{9-2\cdot 6}{1} = -3$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 2 - 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 3 = -3.$$

Sehingga diperoleh :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1{,}5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan matriks } U = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Menentukan nilai x dari persamaan $u_x = y$, terlebih dahulu cari $l_y = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1{,}5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Di peroleh nilai $y_1 = 2$, $y_2 = 5$ dan $y_3 = 14$

Masukkan ke persamaan $u_x = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{y_3}{u_{33}} = \frac{14}{7} = 2$$

$$x_2 = \frac{y_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} = \frac{5-3\cdot 2}{1} = -1$$

$$x_1 = \frac{y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}} = \frac{2-6\cdot(-1)-2\cdot 2}{2} = 2$$

Sehingga solusi dari SPL tersebut adalah

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$ dan $x_3 = 2$.

2.4 Koefisien Interval

Bilangan riil yang biasa dioperasikan adalah bernilai tunggal, baik bilangan bulat maupun bilangan pecahan. Namun, dalam analisis interval bilangan yang dioperasikan memiliki nilai yang berada dalam suatu interval tertutup. Interval merupakan suatu himpunan bagian dari bilangan riil yang memenuhi pertidaksamaan tertentu. Berdasarkan pernyataan tersebut, maka suatu bilangan nyata bernilai tunggal dapat dikatakan merupakan keadaan khusus dari suatu interval.

Secara umum, kumpulan bilangan riil X dalam interval antara $\underline{a}$ dan $\overline{a}$ dengan $\underline{a} < \overline{a}$ dan $\underline{a}$ maupun $\overline{a}$ terletak antara $-\infty$ dan ∞ dinotasikan sebagai berikut :

$$X = \{x : x \epsilon R, \underline{a} \le x \le \overline{a}, \underline{a}, \overline{a} \epsilon R, -\infty < \underline{a} < \overline{a} < \infty\}.$$

Suatu interval x mempunyai batas interval yaitu batas interval bawah (nilai minimum) dan batas interval atas (nilai maksimum) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$A = [\underline{a}, \overline{a}]$$

dengan $\underline{a} \leq \overline{a}$.

Himpunan interval umum dinotasikan dengan $\mathbb{KR}$ dan dibagi menjadi tiga bagian, yaitu :

1. Suatu himpunan dikatakan *proper* interval dengan batas perintahnya semakin tinggi atau batas interval bawah lebih kecil dari batas interval atas. *Proper* interval ini diidentiikasi dengan interval klasik dan dinotasikan $\mathbb{IR} := \{[\underline{a}, \overline{a}] \; \underline{a} \leq \overline{a}\}$. *Strictly proper* interval dengan $\underline{a} < \overline{a}$.
2. Suatu himpunan dikatakan *improper* interval dengan batas perintahnya semakin rendah atau batas interval bawah lebih besar dari batas interval atas. Himpunan ini dinotasikan dengan $\overline{\mathbb{IR}} := \{[\underline{a}, \overline{a}] \; \underline{a} \geq \overline{a}\}$. *Strictly improper* interval dengan $\underline{a} > \overline{a}$.
3. Suatu himpunan dikatakan degenerasi interval $\{[\underline{a}, \overline{a}] \; \underline{a} = \overline{a}\} = \mathbb{IR} \cap \overline{\mathbb{IR}}$.

Berdasarkan hal tersebut, maka himpunan bilangan riil $\{x \epsilon \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}$, yang dapat memberikan dua interval umum $[\underline{a}, \overline{a}]$ dan $[\overline{a}, \underline{a}]$. Dengan tujuan memperkenakan tiga operasi berikut yaitu :

1. Operasi dual didefinisikan dengan dual $\underline{a}, \overline{a}] = [\overline{a}, \underline{a}]$
2. Proyeksi proper didefinisikan dengan pro $[\underline{a}, \overline{a}] = [min\{\underline{a}, \overline{a}\}, \max\{\underline{a}, \overline{a}\}]$
3. Proyeksi improper didefinisikan dengan
   imp $\underline{a}, \overline{a}] = [max\,\{\underline{a}, \overline{a}\}, \min\,\{\underline{a}, \overline{a}\}]$.

Definisi 2.3 (Alexandre dan Gilles, 2007) Diberikan dua interval umum $\tilde{a} = \; \underline{a}, \overline{a}]$ dan $\tilde{b} = \; \underline{b}, \overline{b}]$ maka $\tilde{a} \subseteq \tilde{b} \Leftrightarrow \underline{b} \leq \underline{a} \wedge \overline{a} \leq \overline{b}$.

Sebagai contohnya diberikan $[-1,1] \subseteq [-1.1, -1.1]$, $[1.1, -1.1] \subseteq [1, -1]$ dan $[2, 0.9] \subseteq [-1,1]$.

Degenerasi interval diidentifikasi jika $\tilde{a}$ proper maka $\underline{a} \in \tilde{a} \Leftrightarrow \underline{a} \subseteq \tilde{a}$. Disisi lain, jika $\tilde{a}$ *strictly improper* maka $\tilde{a} \in \mathbb{R}$, tidak berlaku $\underline{a} \subseteq \tilde{a}$.

Aritmatika interval umum disebut juga aritmatika Kaucher yang meluas ke interval aritmatika klasik. Aritmatika ini sama dengan interval aritmatika $A \circ B = \{a \circ b \in \mathbb{R} | a \epsilon A, b \epsilon B\}$. Jika *proper* dan *improper* dilibatkan, beberapa pernyataan digunakan seperti:

$\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$ dan jika $\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}, \overline{b} \geq 0$ maka

$\underline{a}, \overline{a}] \times [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} \times \underline{b}, \overline{a} \times \overline{b}]$.

2.5 Operasi Aritmatika Interval

Definisi 2.3 (K. Ganesan, 2007) Operasi aritmatika interval untuk $\tilde{a}\ dan\ \tilde{b}$ dalam $\mathbb{KR}$ dan untuk $* \in \{+, -, \cdot, \div\}$, didefinisikan sebagai :

$$\tilde{a} * \tilde{b} = [m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) + k] \tag{2.1}$$

dengan

$$m(\tilde{a}) = \left(\frac{\underline{a}+\overline{a}}{2}\right) \tag{2.2}$$

$$k = \min\left\{\left(m(\tilde{a}) * m(\tilde{b})\right) - \alpha, \beta - \left(m(\tilde{a}) * m(\tilde{b})\right)\right\}. \tag{2.3}$$

Untuk lebih jelasnya maka berikut ini adalah ketentuan dalam operasi aritmatika interval

(i) Penjumlahan

$$\tilde{a} + \tilde{b} = [\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}]$$

$$= \left[\left(m(\tilde{a}) + m(\tilde{b})\right) - k, \left(m(\tilde{a}) + m(\tilde{b})\right) + k\right] \tag{2.4}$$

dengan ;

$$k = \left(\frac{(\overline{b} + \overline{a}) - (\underline{b} + \underline{a})}{2}\right). \tag{2.5}$$

(ii) Pengurangan

$$\tilde{a} - \tilde{b} = [\underline{a}, \overline{a}] - [\underline{b}, \overline{b}]$$

$$= \left[\left(m(\tilde{a}) - m(\tilde{b})\right) - k, \left(m(\tilde{a}) - m(\tilde{b})\right) + k\right] \tag{2.6}$$

dengan :

$$k = \left(\frac{(\overline{b} + \overline{a}) - (\underline{b} + \underline{a})}{2}\right).$$

(iii) Perkalian

$$\tilde{a}\tilde{b} = [\underline{a},\overline{a}][\underline{b},\overline{b}]$$

$$= \left[\left(m(\tilde{a})\, m(\tilde{b})\right) - k, \left(m(\overline{a})m(\tilde{b})\right) + k\right] \tag{2.7}$$

dengan

$$k = \min\left\{\left(m(\tilde{a})\, m(\tilde{b})\right) - \alpha, \beta - \left(m(\overline{a})m(\tilde{b})\right)\right\} \tag{2.8}$$

dan

$$\alpha = \min\left(\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\right) \tag{2.9}$$

$$\beta = \max\left(\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\right). \tag{2.10}$$

(iv) Pembagian

$$\tilde{X}^{-1} = [\underline{x},\overline{x}]^{-1} = \left[\frac{1}{m(\tilde{x})} - k, \frac{1}{m(\tilde{x})} + k\right] \tag{2.11}$$

dengan $k = min\left\{\frac{1}{\overline{x}}\left(\frac{\overline{x}-\underline{x}}{\overline{x}+\underline{x}}\right), \frac{1}{\underline{x}}\left(\frac{\overline{x}-\underline{x}}{\overline{x}+\underline{x}}\right)\right\}$ dan $0 \notin [\underline{x},\overline{x}]$. (2.12)

Berdasarkan definisi tersebut maka diberikan contoh berikut ini:

Contoh 2.3 : Diberikan $\tilde{a} = [-1,2]$ dan $\tilde{b} = [3,5]$ maka tentukanlah hasil dari $(\tilde{a}+\tilde{b})$, $(\tilde{a}-\tilde{b})$, dan $(\tilde{a}\tilde{b})$.

Penyelesaian:

Sebelum melakukan perhitungan, perlu dicari:

$m(\tilde{a}) = \frac{(-1)+2}{2} = \frac{1}{2}$ dan $m(\tilde{b}) = \frac{3+5}{2} = 4$

$$k = \frac{(5+2)-(3+(-1))}{2} = \frac{5}{2}$$

maka

$$\tilde{a}+\tilde{b} = [\underline{a},\overline{a}] + [\underline{b},\overline{b}]$$

$$=[-1,2]+[3,5] = \left[\left(\frac{1}{2}+4\right) - \frac{5}{2}, \left(\frac{1}{2}+4\right) + \frac{5}{2}\right] = [2,7]$$

$$\tilde{a}-\tilde{b} = \underline{a},\overline{a}] - [\underline{b},\overline{b}]$$

$$= [-1,2] - [3,5] = \left[\left(\frac{1}{2}-4\right) - \frac{5}{2}, \left(\frac{1}{2}-4\right) + \frac{5}{2}\right] = [-6,-1]$$

Selanjutnya untuk menentukan $\tilde{a}\tilde{b}$, terlebih dahulu tentukan :

$$\alpha = \min\left(\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\right) = min\left((-1)3, (-1)5, (2)3, (2)5\right) = -5$$

$$\beta = \max(\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}) = max((-1)3, (-1)5, (2)3, (2)5) = 10$$

$$k = \min\left\{\left(m(\overline{a})\ m\left(\overline{b}\right)\right) - \alpha, \beta - \left(m(\overline{a})m\left(\overline{b}\right)\right)\right\}$$

$$= \min\left\{\left(\left(\frac{1}{2}\right)4\right) - (-5), 10 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)4\right)\right\} = 7$$

maka

$$\tilde{a}\tilde{b} = \left[\left(\left(\frac{1}{2}\right)4\right) - 7, \left(\left(\frac{1}{2}\right)4\right) + 7\right] = [-5,9].$$

Selain operasi aritmatika juga ada operasi lain dalam interval yaitu operasi *dual*.

Definisi 2.4 (Alexandre dan Gilles, 2007) Operasi *dual* didefinisikan *dual* $[a,b] = [b,a]$ dan Opposite dari $\tilde{x}$ adalah dual $\tilde{x}$.

Berikut dikenalkan beberapa operasi dual pada interval yaitu :

1) $\tilde{x} + (-dual\ \tilde{x}) = \tilde{x} - dual\ \tilde{x} = [0,0]$
2) $\tilde{x} * \left(\frac{1}{dual\ \tilde{x}}\right) = \frac{\tilde{x}}{dual\ \tilde{x}} = [1,1]$
3) Invers dari $\tilde{x}$ adalah $(\tilde{x})^{-1}$.

2.6 SPL Interval

SPL interval merupakan kumpulan dari suatu sistem persamaan linier yang koefisiennya berupa interval sehingga dari SPL tersebut, bisa dibentuk kedalam suatu matriks interval. Matriks interval merupakan matriks yang elemen-elemen di dalamnya berupa interval tertutup dengan satu matriks batas bawah dan satu matriks batas atas sebagai penyusunnya. Matriks interval A dinotasikan $\mathbb{KR}^{nxn}$, dan vektor interval dinotasikan $\mathbb{KR}^{n}$. Misalnya diberikan suatu SPL interval yang terdiri dari *n* daris dan *n* kolom, dapat ditulis sebagai berikut:

$$[\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}]\tilde{x}_1 + [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}]\tilde{x}_2 + [\underline{a}_{13}, \overline{a}_{13}]\tilde{x}_3 + \cdots + [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}]\tilde{x}_n = [\underline{b}_1, \overline{b}_1]$$

$$[\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}]\tilde{x}_1 + [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}]\tilde{x}_2 + [\underline{a}_{23}, \overline{a}_{23}]\tilde{x}_3 + \cdots + [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}]\tilde{x}_n = [\underline{b}_2, \overline{b}_2]$$

$$[\underline{a}_{31}, \overline{a}_{31}]\tilde{x}_1 + [\underline{a}_{32}, \overline{a}_{32}]\tilde{x}_2 + [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}]\tilde{x}_3 + \cdots + [\underline{a}_{3n}, \overline{a}_{3n}]\tilde{x}_n = [\underline{b}_3, \overline{b}_3]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}]\tilde{x}_1 + [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}]\tilde{x}_2 + [\underline{a}_{n3}, \overline{a}_{n3}]\tilde{x}_3 + \cdots + \underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]\tilde{x}_n = |\underline{b}_n, \overline{b}_n]$$

Untuk memudahkan dalam menyelesaikan SPL, maka SPL tersebut dapat ditulis kedalam matriks berikut

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & [\underline{a}_{13}, \overline{a}_{13}] & \cdots & \underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ \underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & [\underline{a}_{23}, \overline{a}_{23}] & \cdots & \underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ \underline{a}_{31}, \overline{a}_{31}] & [\underline{a}_{32}, \overline{a}_{32}] & [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}] & \cdots & \underline{a}_{3n}, \overline{a}_{3n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}] & [\underline{a}_{n3}, \overline{a}_{n3}] & \cdots & \underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{x}_1, \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2, \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3, \overline{x}_3] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n, \overline{x}_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{b}_1, \overline{b}_1] \\ [\underline{b}_2, \overline{b}_2] \\ [\underline{b}_3, \overline{b}_3] \\ \vdots \\ [\underline{b}_n, \overline{b}_n] \end{bmatrix}$$

Dengan $\underline{a}_{1n} \leq \overline{a}_{1n}$.

Berdasarkan pernyataan B.T Polyak dan S.A Nazin, jika matriks $\tilde{A}$ regular dan singular untuk $\tilde{A} \epsilon \tilde{A}$ maka SPL interval memiliki solusi tunggal.

Definisi 2.5 (Suci Maharani, dkk, 2007) Jika $\underline{a}, \overline{a}$ adalah dua matriks dalam ruang R^{nxn}, $\underline{a} \leq \overline{a}$, maka $\tilde{a} = [\underline{a}, \overline{a}] = \{A \; ; \; \underline{a} \leq \overline{a}\}$ disebut matriks interval , dan matriks $\underline{a}, \overline{a}$ merupakan batas ínterval.

Contoh 2.4 : Diberikan suatu matriks interval berorde $2x2$ $\tilde{\boldsymbol{a}}$ = $\underline{a}, \overline{a}]$ = $\begin{bmatrix} [2,6] & [5,10] \\ [0,3] & [-1,0] \end{bmatrix}$, tunjukkan bahwa $\underline{a} \leq \overline{a}$!

Penyelesaian :

Dengan $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\overline{a} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ maka $2 < 6, 5 < 10, 0 < 3, dan -1 < 0$.

Terbukti bahwa $\underline{a} \leq \overline{a}$.

2.7 Determinan Matriks Interval

Definisi 2.6 (Anton, 1998) Determinan dari matriks interval $\tilde{A} = (\tilde{a}_{kl})$ yang berorde $n \times n$ adalah $\det(\tilde{A}) = |\tilde{A}| = \sum \tilde{a}_{kl} \tilde{C}_{kl}$, dimana $\tilde{C}_{kl}$ adalah kofaktor dari $\tilde{a}_{kl}$.

Berdasarkan definisi di atas dapat kita buat langkah-langkah dalam menentukan nilai determinan dari matriks interval, yaitu:

1. Menentukan matriks interval.
2. Memilih baris ke-i atau kolom ke-j yang akan dilakukan ekspansi

kofaktor.

3. Menentukan kofaktor sepanjang baris atau kolom yang telah dipilih $(\tilde{C}_{kl})$.
4. Menentukan determinan matriks interval :

$$\det(\tilde{A}) = |\tilde{A}| = \sum \tilde{a}_{kl}\, \tilde{C}_{kl}.$$

Misalkan matriks interval berikut:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{13} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} & \tilde{b}_{33} \end{bmatrix}.$$

maka determinan matriks $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah sebagai berikut:

a. Karena matriks A hanya berukuran 2x2 maka tidak menggunakan metode ekspansi kofaktor, hanya dengan cara berikut:

$$|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}. \quad (2.13)$$

b. Matriks B berukuran 3x3, maka kita gunakan metode ekspansi kofaktor, dengan berdasarkan langkah-langkah:

1. Diberikan matriks interval :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{13} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} & \tilde{b}_{33} \end{bmatrix}.$$

2. Ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama atau sepanjang kolom kedua.
3. Matriks interval kofaktor dari $\tilde{B}$:
   1. Sepanjang baris pertama

$$\tilde{C}_{11} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{32} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix},\ \tilde{C}_{12} = -\begin{vmatrix} \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix},\ \tilde{C}_{13} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

   2. Sepanjang kolom ke-dua

$$\tilde{C}_{12} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix},\ \tilde{C}_{22} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{13} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix},\ \tilde{C}_{32} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{13} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{23} \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

4. Determinan matriks interval $\tilde{B}$:
   1. Sepanjang baris pertama

$$\det(\tilde{B}_{3\times3}) = \tilde{b}_{11}\tilde{C}_{11} + \tilde{b}_{12}\tilde{C}_{12} + \tilde{b}_{13}\tilde{C}_{13} \quad (2.16)$$

$$\det(\tilde{B}_{3\times3}) = \tilde{b}_{11}\begin{vmatrix} \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{32} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix} - \tilde{b}_{12}\begin{vmatrix} \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix} + \tilde{b}_{13}\begin{vmatrix} \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \tilde{b}_{11}(\tilde{b}_{22}\tilde{b}_{33} - \tilde{b}_{23}\tilde{b}_{32}) - \tilde{b}_{12}(\tilde{b}_{21}\tilde{b}_{33} - \tilde{b}_{23}\tilde{b}_{31}) + \tilde{b}_{13}(\tilde{b}_{21}\tilde{b}_{32} - \tilde{b}_{22}\tilde{b}_{31}).$$

2. Sepanjang kolom ke-dua

$$\det(\tilde{B}_{3\times 3}) = \tilde{b}_{12}\tilde{C}_{12} + \tilde{b}_{22}\tilde{C}_{22} + \tilde{b}_{32}\tilde{C}_{32} \tag{2.16}$$

$$\det(\tilde{B}_{3\times 3}) = -\tilde{b}_{12}\begin{vmatrix} \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix} + \tilde{b}_{22}\begin{vmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{13} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix} - \tilde{b}_{32}\begin{vmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{13} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -\tilde{b}_{12}(\tilde{b}_{21}\tilde{b}_{33} - \tilde{b}_{23}\tilde{b}_{31}) + \tilde{b}_{22}(\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{33} - \tilde{b}_{13}\tilde{b}_{31}) - \tilde{b}_{32}(\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{23} - \tilde{b}_{13}\tilde{b}_{23}).$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang digunakan adalah studi literatur, yaitu merujuk pada sebuah jurnal yang diulas, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Diberikan suatu sistem persamaan linier interval yang terdiri dari n persamaan dan n variabel

$$
\begin{array}{c}
[\underline{a}_{11},\overline{a}_{11}]\tilde{x}_1 + [\underline{a}_{12},\overline{a}_{12}]\tilde{x}_2 + [\underline{a}_{13},\overline{a}_{13}]\tilde{x}_3 + \cdots + [\underline{a}_{1n},\overline{a}_{1n}]\tilde{x}_n = [\underline{b}_1,\overline{b}_1] \\
[\underline{a}_{21},\overline{a}_{21}]\tilde{x}_1 + [\underline{a}_{22},\overline{a}_{22}]\tilde{x}_2 + [\underline{a}_{23},\overline{a}_{23}]\tilde{x}_3 + \cdots + [\underline{a}_{2n},\overline{a}_{2n}]\tilde{x}_n = [\underline{b}_2,\overline{b}_2] \\
[\underline{a}_{31},\overline{a}_{31}]\tilde{x}_1 + [\underline{a}_{32},\overline{a}_{32}]\tilde{x}_2 + [\underline{a}_{33},\overline{a}_{33}]\tilde{x}_3 + \cdots + [\underline{a}_{3n},\overline{a}_{3n}]\tilde{x}_n = [\underline{b}_3,\overline{b}_3] \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
[\underline{a}_{n1},\overline{a}_{n1}]\tilde{x}_1 + [\underline{a}_{n2},\overline{a}_{n2}]\tilde{x}_2 + [\underline{a}_{n3},\overline{a}_{n3}]\tilde{x}_3 + \cdots + [\underline{a}_{nn},\overline{a}_{nn}]\tilde{x}_n = [\underline{b}_n,\overline{b}_n]
\end{array}
$$

2. Mengubah SPL interval ke dalam sebuah matriks interval $\tilde{A}$ yang berukuran $nxn, \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$

$$
\begin{bmatrix}
[\underline{a}_{11},\overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12},\overline{a}_{12}] & [\underline{a}_{13},\overline{a}_{13}] & \cdots & [\underline{a}_{1n},\overline{a}_{1n}] \\
[\underline{a}_{21},\overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22},\overline{a}_{22}] & [\underline{a}_{23},\overline{a}_{23}] & \cdots & [\underline{a}_{2n},\overline{a}_{2n}] \\
[\underline{a}_{31},\overline{a}_{31}] & [\underline{a}_{32},\overline{a}_{32}] & [\underline{a}_{33},\overline{a}_{33}] & \cdots & [\underline{a}_{3n},\overline{a}_{3n}] \\
\vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\
[\underline{a}_{n1},\overline{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2},\overline{a}_{n2}] & [\underline{a}_{n3},\overline{a}_{n3}] & \cdots & [\underline{a}_{nn},\overline{a}_{nn}]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[\underline{x}_1,\overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2,\overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3,\overline{x}_3] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n,\overline{x}_n]
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
[\underline{b}_1,\overline{b}_1] \\ [\underline{b}_2,\overline{b}_2] \\ [\underline{b}_3,\overline{b}_3] \\ \vdots \\ [\underline{b}_n,\overline{b}_n]
\end{bmatrix}
$$

3. Menentukan nilai determinan dari matriks $\tilde{A}$.
4. Menentukan matriks $\tilde{L}$ dan matriks $\tilde{U}$ dari matriks koefisien $\tilde{A}$ dengan aproksimasi solusi AE dengan menggunakan metode dekomposisi dollit

$$
\tilde{L} = \begin{bmatrix}
[1,1] & [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\
[\underline{l}_{21},\overline{l}_{21}] & [1,1] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\
[\underline{l}_{n1},\overline{l}_{31}] & [\underline{l}_{32},\overline{l}_{32}] & [1,1] & \cdots & [0,0] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
[\underline{l}_{n1},\overline{l}_{n1}] & [\underline{l}_{n2},\overline{l}_{n2}] & [1,1] & \cdots & [1,1]
\end{bmatrix}
$$ dan matriks

$$\widetilde{U} = \begin{bmatrix} [\underline{u}_{11}, \overline{u}_{11}] & [\underline{u}_{12}, \overline{u}_{12}] & [\underline{u}_{13}, \overline{u}_{13}] & \cdots & [\underline{u}_{1n}, \overline{u}_{1n}] \\ [0,0] & [\underline{u}_{22}, \overline{u}_{22}] & [\underline{u}_{23}, \overline{u}_{23}] & \cdots & [\underline{u}_{2n}, \overline{u}_{2n}] \\ [0,0] & [0,0] & [\underline{u}_{33}, \overline{u}_{33}] & \cdots & [\underline{u}_{3n}, \overline{u}_{3n}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{u}_{nn}, \overline{u}_{nn}] \end{bmatrix}.$$

5. Menentukan nilai $\tilde{x}$ dari persamaan $\widetilde{U}\tilde{x} = \tilde{y}$, tetapkan harga $\tilde{y}$ dari persamaan $\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b}$, dapat dilakukan dengan cara substitusi maju dan substitusi mundur.

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab IV ini berisikan tentang langkah-langkah dalam penyelesaian sistem persamaan linier interval dengan metode dekomposisi LU.

4.1 Aproksimasi Solusi *AE*

Definisi 4.1 (Alexandre dan Gilles, 2006) Diberikan sebuah matriks interval $A \in \mathbb{KR}^{nxn}$ dan vektor interval $b \, \epsilon \, \mathbb{KR}^n$ maka solusi AE adalah

$$\sum(f, a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | \exists a \in a \exists b \in b \; f(a, x) = b\}$$

Dengan f linear, dan (a_i) $i \, \epsilon \, \{1, \dots, n\}$ adalah koefisien yang disusun ke dalam matriks $A \coloneqq \left(A_{i,j}\right) i, j\{1, \dots, n\}$ yang digunakan untuk interval dinotasikan

$$\sum(A, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | \exists A \in A \exists b \in b \; Ax = b\}$$

Definisi 4.2 (Alexandre dan Gilles, 2006) Diberikan $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ dan $b \in \mathbb{R}^n$, maka solusi AE adalah

$\{x \in \mathbb{R}^2 | \forall A_{11} \in A_{11}, \forall A_{21} \in A_{21}, \forall A_{22} \in A_{22}, \forall b_1 \in b_1, \exists \, A_{12} \in A_{12}, \exists \, b_2 \in b_2, Ax = b\}$

dimisalkan

$$A^{\forall} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^{\exists} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.1)$$

dan $b^{\forall} = (b_1 \quad 0)^T$, $\qquad b^{\exists} = (0 \quad b_2)^T \qquad (4.2)$

Sehingga menjadi

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \forall A^{\forall} \in A^{\forall}, \forall b^{\forall} \in b^{\forall}, \exists A^{\exists} \in A^{\exists}, \exists b^{\exists} \in b^{\exists}, (A^{\forall} + A^{\exists})x = b^{\forall} + b^{\exists}\} \quad (4.3)$$

Teorema 4.1 (Alexandre dan Gilles, 2006) Diberikan $A \in \mathbb{KR}^{nxn}$ dan $b \, \epsilon \, \mathbb{KR}^n$ maka $x \, \epsilon \sum(A, b) \Leftrightarrow (dual)x \subseteq b$.

Bukti :

Dengan $A^{\forall}$, $A^{\exists}, b^{\forall}$ dan $b^{\exists}$ telah dikemukakan sebelumnya pada persamaan (4.1) dan persamaan (4.2), maka

$(A^\forall + A^\exists)x = b^\forall + b^\exists$ equivalen dengan

$$A^\forall x - b^\forall = -A^\exists x + b^\exists \ , \tag{4.4}$$

selanjutnya

$A^\forall x - b^\forall = \{A^\forall x - b^\forall | A^\forall \in A^\forall, b^\forall \in b^\forall\}$,

dan

$-A^\exists x + b^\exists = \{-A^\exists x + b^\exists | A^\exists \in -A^\exists, b^\exists \in b^\exists\}$.

Berdasarkan persamaan (4.4) maka

$A^\forall x - b^\forall \subseteq -A^\exists x + b^\exists$,

tambahkan $dual\ (A^\exists x) + dual\ b^\forall$ pada ruas kiri dan kanan

$A^\forall x + dual(A^\exists x) \subseteq b^\exists + dual\ b^\forall$

$$\begin{aligned} A^\forall x + dual(A^\exists x) &= A^\forall x + (dual\ A^\exists)x \\ &= (A^\forall + dual\ A^\exists)x. \end{aligned}$$

dengan $A = A^\exists + dual\ A^\forall$ dan $b = b^\exists + dual\ b^\forall$

maka

$(A^\forall + dual\ A^\exists)x \subseteq b$

akibatnya

$(dual\ A)x \subseteq b$. ■

4.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Interval dengan Metode Dekomposisi *LU*

Dekomposisi LU pada koefisien interval hampir sama dengan dekomposisi LU pada koefisien bilngan riil, hanya saja terdapat perbedaan pada proses pemfaktoran matriks L dan matriks U.

$\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$

Dengan

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & [\underline{a}_{13}, \overline{a}_{13}] & \cdots & \underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & [\underline{a}_{23}, \overline{a}_{23}] & \cdots & \underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ [\underline{a}_{31}, \overline{a}_{31}] & [\underline{a}_{32}, \overline{a}_{32}] & [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}] & \cdots & \underline{a}_{3n}, \overline{a}_{3n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}] & [\underline{a}_{n3}, \overline{a}_{n3}] & \cdots & \underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [\underline{l}_{21}, \bar{l}_{21}] & [1,1] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [\underline{l}_{n1}, \bar{l}_{31}] & [\underline{l}_{32}, \bar{l}_{32}] & [1,1] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{l}_{n1}, \bar{l}_{n1}] & [\underline{l}_{n2}, \bar{l}_{n2}] & [1,1] & \cdots & [1,1] \end{bmatrix}$$

dan

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} [\underline{u}_{11}, \bar{u}_{11}] & [\underline{u}_{12}, \bar{u}_{12}] & [\underline{u}_{13}, \bar{u}_{13}] & \cdots & [\underline{u}_{1n}, \bar{u}_{1n}] \\ [0,0] & [\underline{u}_{22}, \bar{u}_{22}] & [\underline{u}_{23}, \bar{u}_{23}] & \cdots & [\underline{u}_{2n}, \bar{u}_{2n}] \\ [0,0] & [0,0] & [\underline{u}_{33}, \bar{u}_{33}] & \cdots & [\underline{u}_{3n}, \bar{u}_{3n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{u}_{nn}, \bar{u}_{nn}] \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan matriks L sebagai berikut :

$$L_{ij} = 1 \ \ untuk\ i = j\ \ dan\ L_{ij} = 0\ untuk\ i < j, \tag{4.5}$$

$$L_{ij} = \left. (A_{ij} - \textstyle\sum_{k<j} dual(L_{ik}U_{kj})) \middle/ (dual\ U_{ii}) \right.\ untuk\ j < i, \tag{4.6}$$

untuk matriks U

$$U_{ij} = 0\ \ untuk\ i > j, \tag{4.7}$$

$$U_{ij} = A_{ij} - \textstyle\sum_{k<i} dual\left(L_{ik}U_{kj}\right) untuk\ i \leq j. \tag{4.8}$$

Proposisi 4.1 (Alexandre dan Gilles, 2007) Misalkan $A \epsilon \mathbb{R}^{nxn}$ merupakan matriks interval. Ditetapkan bahwa matriks interval L dan U didefinisikan pada (4.7- 4.8) dapat ditulis $A = LU$

Bukti :

Anggap $i, j \epsilon [1 \dots n]$ dengan $i \leq j$, maka dari persamaan (4.8)

$$U_{ij} = A_{ij} - \textstyle\sum_{k<i} dual\left(L_{ik}U_{kj}\right) untuk\ i \leq j.$$

Menambahkan kedua ruas dengan $\sum_{k<i} \left(L_{ik}U_{kj}\right)$ sehingga menjadi

$$U_{ij} + \textstyle\sum_{k<i} \left(L_{ik}U_{kj}\right) = A_{ij} - \sum_{k<i} dual\left(L_{ik}U_{kj}\right) + \sum_{k<i} \left(L_{ik}U_{kj}\right)$$

maka

$$U_{ij} + \textstyle\sum_{k<i} \left(L_{ik}U_{kj}\right) = A_{ij} - [0.0].$$

Sehingga menjadi

$$U_{ij} + \textstyle\sum_{k<i} \left(L_{ik}U_{kj}\right) = A_{ij}.$$

Untuk $L_{ij} = 1$ dan $L_{ij} = 0$ dengan $i \leq j$, dan berdasarkan persamaan (4.7) maka

$$0 + \sum_{k<i} \left(L_{ik}U_{kj}\right) = A_{ij}$$

sehingga

$$\sum_{k<i} \left(L_{ik}U_{kj}\right) = A_{ij.} \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.2 (Alexandre dan Gilles, 2007) Misalkan $A \epsilon \mathbb{R}^{nxn}$, $b \epsilon \mathbb{R}^{n}$. jika matriks L dan matriks U merupakan dekomposisi LU interval dari matiks koefisien A, maka didefinisikan vektor interval x, x' , $y, y' \epsilon \mathbb{R}^{n}$ untuk $i \epsilon [1..n]$

$$y_i = b_i - \sum_{i>j} l_{ij}\left(dual\ y_j\right) \qquad \text{dan} \qquad x_i = \frac{\left(y_i - \sum_{i<j} u_{ij}(dua\ x_j)\right)}{u_{ii}}$$

$$y_i' = b_i - \sum_{i>j} l_{ij}\left(dual\ y_j'\right) \qquad \text{dan} \qquad x_i' = \frac{\left(y_{i'} - \sum_{i<j} u_{ij}(dua\ x_{j'})\right)}{u_{ii}}.$$

Maka akan ditunjukkan bahwa

(i) jika L adalah *proper* dan x adalah *proper* maka $x \in \sum(A, b)$.

(ii) U dan L adalah *improper*, jika x' adalah *proper* maka $\sum(A, b) \subseteq x'$, $\sum(A, b) = \emptyset$.

Bukti :

Jika $A = LU$ maka $(dual\ A) = (dual\ L)(dual\ U)$

(i) Berdasarkan definisi dari y dan x maka diperoleh

$$(dual\ L)y = b\ dan\ (dual\ U)x = y$$

oleh karena itu, maka

$$(dual\ L)\left((dual\ U)x\right) = b$$

perhatikan $x \epsilon x$, hal ini menunjukkan bahwa

$$(dual\ L)\left((dual\ U)x\right) \subseteq (dual\ L)\left((dual\ U)x\right),$$

maka

$$(dual\ L)\left((dual\ U)x\right) \subseteq b.$$

Sehingga

$$x \in \sum(A, b). \qquad \blacksquare$$

(ii) Asumsikan $x \in \sum(A, b)$

maka diperoleh

$$(dual\ L)\left((dual\ U)x\right) \subseteq b$$

Karena $(dual\ L)$ dan $(dual\ U)$ adalah *proper*, maka b harus *proper* juga. Hukum distributif membuktikan bahwa

$$(dual\ l)(dual\ U)x \subseteq (dual\ l)(dual\ U)x$$

Sehingga

$$(dual\ l)(dual\ U)x \subseteq b,$$

Karena $(dual\ U)$ *proper* maka $(dual\ U)x$ juga proper

Selanjutya akan dibuktikan bahwa pada baris pertama

$(dual\ l)\ U \subseteq b$ dengan $U_1 \subseteq b_1$ maka $b_1{=}y'_1$

untuk $i \in \{2, \dots, n-1\}$ dan $j < i$

Maka

$$u_j \subseteq y'_{j.}$$

Untuk baris pertama

$$(dual\ l)\ U \subseteq b$$

$$U_i + \sum_{j<i} \left(dual\ L_{ij}\right) U_j \subseteq b_i$$

$$U_i \subseteq b_i - \sum_{j<i} L_{ij} \left(dual\ U_j\right) \subseteq b_i - \sum_{j<i} L_{ij} U_j$$

Dan akhirnya diperoleh

$u_i \subseteq b_i - \sum_{j<i} L_{ij} y'_j$ yang mana sama dengan definisi y'

$$(dual\ U)x \subseteq y'$$

$$x \subseteq X'$$

Akibatnya, jika X' adalah *proper* maka

$\sum(A, b) \subseteq x',\ \sum(A, b) = \emptyset.$ ■

Untuk lebih jelasnya maka diberikan contoh berikut:

Contoh 4.2 : Diberikan suatu SPL interval berikut

$$\begin{aligned}
[1,3]\ \tilde{x}_1 + [-2,2]\ \tilde{x}_2 \quad &= [0,8] \\
[1,3]\ \tilde{x}_1 + [0,6]\ \tilde{x}_2 + [1,1]\ \tilde{x}_3 &= [-8,0] \\
[2,4]\ \tilde{x}_2 + [3,5]\tilde{x}_3 &= [-4,4].
\end{aligned}$$

Selesaikan SPL tersebut dengan metode dekomposisi LU !

Penyelesaian :

Penyelesaian SPL interval dengan metode dekomposisi LU dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Mengubah SPL interval ke dalam matriks interval

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [1,3] & [-2,2] & [0,0] \\ [1,3] & [0,6] & [1,1] \\ [0,0] & [2,4] & [3,5] \end{bmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} [0,8] \\ [-8,0] \\ [-4,4] \end{bmatrix}.$$

2) Mencari nilai determinan dari matriks $\tilde{A}$, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

   a) Diberikan matriks interval

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} [1,3] & [-2,2] & [0,0] \\ [1,3] & [0,6] & [1,1] \\ [0,0] & [2,4] & [3,5] \end{vmatrix}.$$

   b) Ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

   c) Kofaktor

$$\tilde{C}_{11} = \begin{vmatrix} [0,6] & [1,1] \\ [2,4] & [3,5] \end{vmatrix} = ([0,6] \cdot [3,5]) - ([2,4] \cdot [1,1]).$$

Untuk menentukan operasi aritmatika interval pada operasi perkalian terlebih dahulu tentukan

$[0,6] \cdot [3,5] \Longrightarrow \mathrm{m}(\tilde{a}) = \left(\frac{0+6}{2}\right) = 3$ dan $\mathrm{m}(\tilde{b}) = \left(\frac{3+5}{2}\right) = 4$

Selanjutnya akan ditentukan

$$\alpha = \min(\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}) = \min(0, 0, 18, 30) = 0$$

$$\beta = \max(\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}) = \max(0, 0, 18, 30) = 30$$

dan

$$k = \min\left\{\left(m(\overline{a})\, m\left(\overline{b}\right)\right) - \alpha, \beta - \left(m(\overline{a})m\left(\overline{b}\right)\right)\right\}$$
$$= \min(3 \cdot 4 - 0, 30 - 3 \cdot 4)$$
$$= \min(12\,, 18)$$
$$= 12.$$

selanjutnya dengan menggunakan persamaan (2.7), maka:

$$[0,6] \cdot [3,5] = [3 \cdot 4 - 12, 3 \cdot 4 + 12]$$
$$= [0\,, 24].$$

Jadi :

$$\tilde{C}_{11} = ([0,6] \cdot [3,5]) - ([2,4] \cdot [1,1])$$
$$= [0\,, 24] - [2,4]$$

$= [-4\,,22].$

Dengan cara yang sama pada pencarian $\tilde{C}_{11}$ maka didapatkan :

$$\tilde{C}_{12} = \begin{vmatrix} [1\,,3] & [1,\ 1] \\ [0\,,0] & [3,5] \end{vmatrix} = [1\,,3][3,5] - [1,\ 1][0\,,0]$$

$$= ([3\,,15] - [0\,,0]) = [3\,,15]$$

dan

$$\tilde{C}_{13} = \begin{vmatrix} [1\,,3] & [0\,,6] \\ [0\,,0] & [2\,,4] \end{vmatrix} = [1\,,3][2\,,4] - [0\,,0][0\,,6]$$

$$= ([2\,,12] - [0\,,0]) = [2\,,12].$$

d) Determinan matriks interval $\tilde{A}$ yaitu:

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A}_{3\times3}) = |\tilde{A}| &= \tilde{a}_{11}\tilde{C}_{11} + \tilde{a}_{12}\tilde{C}_{12} + \tilde{a}_{13}\tilde{C}_{13} \\ &= [1\,,3][-4\,,22] - [-2\,,2][3\,,5] + [0\,,0][2\,,12] \\ &= [12\,,24] - [-10\,,10\,] + [0\,,0] \\ &= [2\,,34]. \end{aligned}$$

3) Memfaktorkan matriks koefisien $\tilde{A}$ menjadi matriks L dan matriks U

$$\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$$

$$\begin{bmatrix} [1,3] & [1,1] & [0,0] \\ [1,3] & [4,6] & [-2,2] \\ [0,0] & [2,4] & [1,1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [\underline{l}_{21},\bar{l}_{21}] & [1,1] & [0,0] \\ [\underline{l}_{31},\bar{l}_{31}] & [\underline{l}_{32},\bar{l}_{32}] & [1,1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{u}_{11},\bar{u}_{11}] & [\underline{u}_{12},\bar{u}_{12}] & [\underline{u}_{13},\bar{u}_{13}] \\ [0,0] & [\underline{u}_{22},\bar{u}_{22}] & [\underline{u}_{23},\bar{u}_{23}] \\ [0,0] & [0,0] & [\underline{u}_{33},\bar{u}_{33}] \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan matriks L dan U dapat dilakuan dengan cara :

Baris pertama

$$\tilde{U}_{11} = \tilde{a}_{11} = [1,3] \qquad \tilde{U}_{12} = \tilde{a}_{12} = [-2,2] \qquad \tilde{U}_{13} = \tilde{a}_{13} = [0,0].$$

Baris kedua

$$\tilde{L}_{21} = \frac{\tilde{a}_{21}}{(dual\ \tilde{U}_{11})} = \frac{[1,3]}{(dual[1,3]\ )} = [1,1].$$

$$\tilde{U}_{22} = \tilde{a}_{22} - dual\left(\tilde{L}_{21}\tilde{U}_{12}\right) = [0,6] - dual\ ([1,1]\cdot[-2,2]) = [2,4].$$

$$\tilde{U}_{23} = \tilde{a}_{23} - dual\left(\tilde{L}_{21}\tilde{U}_{13}\right) = [1,1] - dual([1,1]\cdot[0,0]) = [1,1].$$

Baris ketiga

$$\tilde{L}_{31} = \frac{\tilde{a}_{31}}{(dual\ \tilde{U}_{11})} = \frac{[0,0]}{(dual[1,3]\ )} = [0,0].$$

$$\tilde{L}_{32} = \left(\frac{\tilde{a}_{32} - dual(\tilde{L}_{31}\tilde{U}_{12})}{(dual\ \tilde{U}_{22})}\right) = \left(\frac{[2,4] - dual([0,0]\cdot[1,1])}{dual\ [2,4]}\right) = \frac{[2,4]}{(dual[2,4]\ )}$$

$$= [1,1].$$

$$\tilde{U}_{33} = \tilde{a}_{33} - dual\left(\tilde{L}_{31}\tilde{U}_{13}\right) - dual\left(\tilde{L}_{32}\tilde{U}_{23}\right)$$

$= [3,5] - dual([0,0] \cdot [0,0]) - dual([1,1] \cdot [1,1]) = [2,4].$

Sehingga diperoleh matriks

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [1,1] & [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [1,1] & [1,1] \end{bmatrix}$$

dan

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} [1,3] & [-2,2] & [0,0] \\ [0,0] & [2,4] & [1,1] \\ [0,0] & [0,0] & [2,4] \end{bmatrix}.$$

4) Menentukan nilai

$\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b}$

$$\begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [1,1] & [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [1,1] & [1,1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0,8] \\ [-8,0] \\ [-4,4] \end{bmatrix}.$$

Maka

$\tilde{y}_1 = \tilde{b}_1 = [0,8].$

$\tilde{y}_2 = \tilde{b}_2 - \tilde{L}_{21}\, dual\, \tilde{y}_1$

$= [-8,0] - [-1,1]\, dual\, [0,8]$

$= [-8,0] - [1,1]\, [8,0] = [-8,-8].$

$\tilde{y}_3 = \tilde{b}_3 - \tilde{L}_{31}\, dual\, \tilde{y}_1 - \tilde{L}_{32}\, dual\, \tilde{y}_2$

$= [-4,4] - [0,0]\, dual\, [0,8] - [1,1]\, dual\, [-8,-8]$

$= [-4,4] - [0,0] - [1,1]\, [-8,-8] = [4,12].$

Sehingga diperoleh $\tilde{y} = \begin{bmatrix} [0,8] \\ [-8,-8] \\ [4,12] \end{bmatrix}.$

Selanjutnya menentukan nilai $\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2\ dan\ \ \tilde{x}_3$ dari persamaan

$\tilde{U}_x = \tilde{y}$

$$\begin{bmatrix} [1,3] & [-2,2] & [0,0] \\ [0,0] & [2,4] & [1,1] \\ [0,0] & [0,0] & [2,4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0,8] \\ [-8,-8] \\ [4,12] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{\tilde{y}_3}{\tilde{a}_{33}} = \frac{[4,12]}{[2.4]} = [2\,,3].$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{\tilde{y}_2 - \tilde{U}_{23}\, dual\, \tilde{x}_3}{\tilde{U}_{22}}$$

$$= \frac{[-8,-8]-[-2,2]\ dual[2,3]}{[2,4]}$$

$$= \frac{[-8,-8]-[1,1]\ [2,3]}{[2,4]}$$

$$= [-5.5\ ,\ -2.5].$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{\tilde{y}_1 - \tilde{U}_{13}\,dual\,\tilde{x}_3 - \tilde{U}_{12}\,dual\,\tilde{x}_2}{\tilde{U}_{11}}$$

$$= \frac{[0,8]-[1,1]\ dual\ [2,3]-[0,0]\ dual[-5.5,-2.5]}{[1,3]}$$

$$= \frac{[0,8]-[1,1]\ [3,2]-[0,0]\ [-2.5,-5.5]}{[1,3]}$$

$$= [-3.7\ ,\ 6.3].$$

Jadi nilai $\tilde{x}_1 = [-3.7\ ,6.3]$, $\tilde{x}_2 = [-5.5\ ,-2.5]$ dan $\tilde{x}_3 = [2\ ,3]$.

Contoh 4.3 : Diberikan suatu SPL interval berikut

$$\begin{aligned}
&[0.8,1.2]\ \tilde{x}_1 + [0.2,0.4]\ \tilde{x}_2 + [1.5,2.5]\ \tilde{x}_3 &&= [0,4]\\
&[0.8,1.2]\ \tilde{x}_1 + [1.8,2.2]\ \tilde{x}_2 + [1.5,2.5]\ \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 &&= [-6,6]\\
&\tilde{x}_1 + [0.4,0.8]\ \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + [2.4,2.8]\ \tilde{x}_4 &&= [8,10]\\
&[4.2,5.2]\ \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + [0.97,1.66]\ \tilde{x}_4 &&= [12,15].
\end{aligned}$$

Selesaikan SPL tersebut dengan metode dekomposisi LU !

Penyelesaian :

Penyelesaian SPL interval dengan metode dekomposisi LU dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Mengubah SPL interval kedalam matriks interval

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0.8,1.2] & [0.2,0.4] & [1.5,2.5] & [0,0] \\ [0.8,1.2] & [1.8,2.2] & [1.5,2.5] & [1,1] \\ [1,1] & [0.4,0.8] & [1,1] & [2.4,2.8] \\ [0,0] & [4.2,5.2] & [1,1] & [0.97,1.66] \end{bmatrix}, \quad \text{Vektor } \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix}$$

dan vektor $\tilde{b} = \begin{bmatrix} [0,4] \\ [-6,6] \\ [8,10] \\ [12,15] \end{bmatrix}$.

2) Mencari nilai determinan dari matriks $\tilde{A}$, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

a) Diberikan matriks interval

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0.8,1.2] & [0.2,0.4] & [1.5,2.5] & [0,0] \\ [0.8,1.2] & [1.8,2.2] & [1.5,2.5] & [1,1] \\ [1,1] & [0.4,0.8] & [1,1] & [2.4,2.8] \\ [0,0] & [4.2,5.2] & [1,1] & [0.97,1.66] \end{bmatrix}.$$

b) Ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

c) Kofaktor.

$$\tilde{C}_{11} = \begin{vmatrix} [1.8,2.2] & [1.5,2.5] & [1,1] \\ [0.4,0.8] & [1.1] & [2.4,2.8] \\ [4.2,5.2] & [1.1] & [0.97,1.66] \end{vmatrix}$$

$= [1.8\,,2.2]\,([1.1][0.97,1.66] - [1.1][2.4,2.8]) -$

$[1.5\,,2.5](\,[0.4,0.8][0.97,1.66] - [4.2,5.2][2.4,2.8]) +$

$[1\,,1]\,([\,0.4,0.8][1\,,1] - [1.1][4.2,5.2]).$

Dengan cara yang sama dengan contoh sebelumnya maka diperoleh

$\tilde{C}_{11} = [1.8\,,2.2][-1.83\,,\ -0.74]$-$[1.5,2.5][-14.21\,,-8.77] +$

$[1\,,1][-16.69\,,-1.27]$

$= [-3.74\,,-1.4] - [-32.8\,,-13.16] + [-4.8\,,-3.4]$

$= [4.62\,,\ 28].$

Selanjutnya untuk mentukan nilai $\tilde{C}_{12}$ dengan cara yang sama yaitu:

$$\tilde{C}_{12} = \begin{vmatrix} [0.8,1.2] & [1.5,2.5] & [1,1] \\ [1,1] & [1.1] & [2.4,2.8] \\ [0,0] & [1.1] & [0.97,1.66] \end{vmatrix}$$

$= [0.8\,,1.2]([1.1][0.97,1.66] - [2.4,2.8][1.1]) - [1.5,2.5]$

$(\,[1,1][0.97,1.66] - [2.4,2.8][0\,,0]) + [1\,,1]([1,1][1\,,1] -$

$1.10\,,0$

$= [0.8\,,1.2][-1.83\,,-0.74] - [1.5\,,2.5][0.97,1.66] + [1\,,1][1,1]$

$= [-2\,,2] - [1.46\,,4.15] + [1\,,1]$

$= [-5.15\,,1.54].$

Dan nilai

$$\tilde{C}_{13} = \begin{vmatrix} [0.8,1.2] & [1.8,2.2] & [1,1] \\ [0,0] & [0.4,0.8] & [2.4,2.8] \\ [0,0] & [4.2,5.2] & [0.97,1.66] \end{vmatrix}$$

$= [0.8\,,1.2]([0.4,0.8][0.97,1.66] - [2.4,2.8][4.2,5.2])$

$[1.8\,,2.2]([0,0][0.97,1.66] - [2.4,2.8][0\,,0]) +$

$[1\,,1]([0,0][4.2,5.2] - [0.4,0.8][0\,,0])$

$= [0.8\,,1.2][-14.17\,, -8.77] - [1.8\,,2.2][0,0] + [1\,,1][0,0]$

$= [-15.2\,, -5.75] - [0,0] + [0,0]$

$= [-15.94\,, -7].$

Dan untuk

$$\tilde{C}_{14} = \begin{vmatrix} [0.8,1.2] & [1.8,2.2] & [1.5,2.5] \\ [0,0] & [0.4,0.8] & [1,1] \\ [0,0] & [4.2,5.2] & [1.1] \end{vmatrix}$$

$= [0.8\,,1.2]([0.4,0.8]\cdot[1\,,1] - [4.2,5.2]\cdot[1,1]) -$

$[1.8\,,2.2]([0,0][1\,,1] - [0\,,0][1\,,1]) + [1.5\,,2.5]([0,0]\cdot$

$[4.2,5.2] - [0\,,0]\cdot[0.4,0.8]$

$= [0.8\,,1.2][-4.8\,,-3.4] - [1.8\,,2.2][0,0] + [1.5\,,2.5][0,0]$

$= [-5.48\,,-2.72] - [0,0]+[0,0]$

$= [-5.48\,,-2.72].$

d) Determinan matriks interval $\tilde{A}$ yaitu:

$\det\left(\tilde{A}_{4\times4}\right) = \left|\tilde{A}\right| = \tilde{a}_{11}\tilde{C}_{11} + \tilde{a}_{12}\tilde{C}_{12} + \tilde{a}_{13}\tilde{C}_{13} + \tilde{a}_{14}\tilde{C}_{14}$

$= [0.8\,,1.2][4.62\,,\ 28] - [0.2\,,0.4][-5.15\,,1.54] +$

$[1.5\,,2.5][-15.94\,,-7] + [0\,,0][-5.48\,,-2.72]$

$= [-32.3\,,24.8].$

3) Memfaktorkan matriks koefisien $\tilde{A}$ menjadi matriks L dan matriks U

$\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$

Dengan matriks $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0.8,1.2] & [0.2,0.4] & [1.5,2.5] & [0,0] \\ [0.8,1.2] & [1.8,2.2] & [1.5,2.5] & [1,1] \\ [1,1] & [0.4,0.8] & [1,1] & [2.4,2.8] \\ [0,0] & [4.2,5.2] & [1,1] & [0.97,1.66] \end{bmatrix}$

$$\text{Matriks } \tilde{L} = \begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ [\underline{l}_{21}, \bar{l}_{21}] & [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [\underline{l}_{31}, \bar{l}_{31}] & [\underline{l}_{32}, \bar{l}_{32}] & [1,1] & [0,0] \\ [\underline{l}_{41}, \bar{l}_{41}] & [\underline{l}_{42}, \bar{l}_{42}] & [\underline{l}_{43}, \bar{l}_{43}] & [1,1] \end{bmatrix},$$

dan

$$\text{matriks } \tilde{U} = \begin{bmatrix} [\underline{u}_{11}, \bar{u}_{11}] & [\underline{u}_{12}, \bar{u}_{12}] & [\underline{u}_{13}, \bar{u}_{13}] & [\underline{u}_{14}, \bar{u}_{14}] \\ [0,0] & [\underline{u}_{22}, \bar{u}_{22}] & [\underline{u}_{23}, \bar{u}_{23}] & [\underline{u}_{24}, \bar{u}_{24}] \\ [0,0] & [0,0] & [\underline{u}_{33}, \bar{u}_{33}] & [\underline{u}_{43}, \bar{u}_{43}] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [\underline{u}_{44}, \bar{u}_{44}] \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan matriks $\tilde{L}$ dan $\tilde{U}$ dapat dilakukan dengan cara :

Baris pertama

$\tilde{U}_{11} = \tilde{a}_{11} = [0.8,1.2]$ $\quad \tilde{U}_{12} = \tilde{a}_{12} = [0.2,0.4]$.

$\tilde{U}_{13} = \tilde{a}_{13} = [1.5,2.5]$ $\quad \tilde{U}_{14} = \tilde{a}_{14} = [0,0]$.

Baris kedua

$$\tilde{L}_{21} = \frac{\tilde{a}_{21}}{(dual\ \tilde{U}_{11})} = \frac{[0.8,1.2]}{(dual[0.8,1.2]\ )} = [1,1].$$

$$\tilde{U}_{22} = \tilde{a}_{22} - dual\left(\tilde{L}_{21}\tilde{U}_{12}\right) = [1.8,2.2] - dual([1,1] \cdot [0.2,0.4])$$

$$= [1.8,2.2] - [0.2,0.4] = [1.6,1.8].$$

$$\tilde{U}_{23} = \tilde{a}_{23} - dual\left(\tilde{L}_{21}\tilde{U}_{13}\right) = [1.5,2.5] - dual([1,1] \cdot [1.5,2.5]) = [0,0].$$

$$\tilde{U}_{24} = \tilde{a}_{24} - dual\left(\tilde{L}_{21}\tilde{U}_{14}\right) = [1,1] - dual([1,1] \cdot [0,0]) = [1,1].$$

Baris ketiga

$$\tilde{L}_{31} = \frac{\tilde{a}_{31}}{(dual\ \tilde{U}_{11})} = \frac{[0,0].}{(dual[0.8,1.2]\ )} = \frac{[0,0].}{[1.2,0.8]} = [0,0].$$

$$\tilde{L}_{32} = \left(\frac{\tilde{a}_{32} - dual(\tilde{L}_{31}\tilde{U}_{12})}{(dual\ \tilde{U}_{22})}\right) = \left(\frac{[0.4,0.8] - dual([0,0]\cdot[0.2,0.4])}{dual\ [1.6\ ,1.8]}\right)$$

$$= \left(\frac{[1.3\ ,1.5] - [0,0]}{[1.8\ ,1.6]}\right)$$

$$= [0.22\ ,0.5].$$

$$\tilde{U}_{33} = \tilde{a}_{33} - dual\left(\tilde{L}_{31}\tilde{U}_{13}\right) - dual\left(\tilde{L}_{32}\tilde{U}_{23}\right)$$

$$= [1,1] - dual([0,0][1.5,2.5]) - dual\ (\ [0.22\ ,0.5][0,0])$$

$= [1,1] - dual(0,0) - dual[0,0]$

$= [1,1].$

$\widetilde{U}_{34} = \tilde{a}_{34} - dual\left(\widetilde{L}_{31}\widetilde{U}_{14}\right) - dual\left(\widetilde{L}_{32}\widetilde{U}_{24}\right)$

$= [2.4,2.8] - dual([0,0]] \cdot [0,0]) - dual([0.22,0.5] \cdot [1,1])$

$= [2.4,2.8] - dual([0,0]) - dual([0.22,0.5])$

$= [2.4,2.8] - [0.5,0.22]$

$= [2.18,2.3].$

Baris keempat

$$\widetilde{L}_{41} = \frac{\tilde{a}_{41}}{(dual\ \widetilde{U}_{11})} = \frac{[0,0]}{(dual[0.8,1.2])} = \frac{[0,0]}{[1.2,0.8]} = [0,0].$$

$$\widetilde{L}_{42} = \left(\frac{\tilde{a}_{42} - dual\ (\widetilde{L}_{41}\widetilde{U}_{12})}{(dual\ \widetilde{U}_{22})}\right) = \left(\frac{[4.2,5.2] - dual\ ([0,0][0.2,0.4])}{dual\ [1.6,1.8]}\right)$$

$$= \left(\frac{[4.2,5.2]-[0,0]}{[1.8,1.6]}\right) = [2.3, 3.3].$$

$$\widetilde{L}_{43} = \frac{\tilde{a}_{43} - dual\ (\widetilde{L}_{41}\widetilde{U}_{13}) - dual\ (\widetilde{L}_{42}\widetilde{U}_{23})}{(dual\ \widetilde{U}_{33})}$$

$$= \frac{[1,1] - dual([0,0]\cdot[2.63,2.89]) - dual\ ([2.3,3.3]\cdot[0,0])}{[1,1.]}$$

$$= \frac{[1,1]-[0,0]}{[1,1]} = [1,1].$$

$\widetilde{U}_{44} = \tilde{a}_{44} - dual\left(\widetilde{L}_{41}\widetilde{U}_{14}\right) - dual\left(\widetilde{L}_{42}\widetilde{U}_{24}\right) - dual\left(\widetilde{L}_{43}\widetilde{U}_{34}\right)$

$= [1.33, 1.17] - dual([0,0] \cdot [0,0]) - dual([2.3, 3.3] \cdot [1,1]) -$
$dual([1,1] \cdot [2.18, 2.3])$

$= [1,1].$

Sehingga diperoleh matriks

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ [1,1] & [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0.22, 0.5] & [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [2.3, 3.3] & [1,1] & [1,1] \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{U} = \begin{bmatrix} [0.8, 1.2] & [0.2, 0.4] & [1.5, 2.5] & [0,0] \\ [0,0] & [1.6, 1.8] & [0,0] & [1,1] \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] & [2.18, 2.3] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{bmatrix}.$$

4) Menentukan nilai

$\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b}$

$$\begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ [1,1] & [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0.22, 0.5] & [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [2.3, 3.3] & [1,1] & [1,1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0,4] \\ [-6,6] \\ [8,10] \\ [12,15] \end{bmatrix}.$$

Maka

$\tilde{y}_1 = \tilde{b}_1 = [0, 4].$

$\tilde{y}_2 = \tilde{b}_2 - \tilde{L}_{21}\ dual\ \tilde{y}_1$

$= [-6, 6] - [1,1]\ dual = [-6, 6] - [1,1]\ [4, 0] = [-6, 2].$

$\tilde{y}_3 = \tilde{b}_3 - \tilde{L}_{31}\ dual\ \tilde{y}_1 - \tilde{L}_{32}\ dual\ \tilde{y}_2$

$= [8,10] - [0,0]\ dual\ [0, 4] - [022,0.5]\ dual\ [-6, 2]$

$= [8,10] - [0,0] - [0.22,0.5]\ [2, -6] = [7, 12.44].$

$\tilde{y}_4 = \tilde{b}_4 - \tilde{L}_{41}\ dual\ \tilde{y}_1 - \tilde{L}_{42}\ dual\ \tilde{y}_2 - \tilde{L}_{43}\ dual\ \tilde{y}_3$

$= [12, 15] - [0,0]\ dual[0, 4] - [2.3,3.3]\ dual[-6, 2] - [1, 1]$

$dual\ [7, 12.44]$

$= [12, 15] - [0,0] - [2.3,3.3]\ [2, -6] - [1, 1][12.44, 7]$

$= [-7.22, 25.14].$

Sehingga diperoleh $\tilde{y} = \begin{bmatrix} [0, 4] \\ [-6, 2] \\ [7, 12.4] \\ [-7.2, 25.1] \end{bmatrix}.$

Selanjutnya menentukan nilai $\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2\ dan\ \ \tilde{x}_3$ dari persamaan

$\tilde{U}_x = \tilde{y}$

$$\begin{bmatrix} [0.8, 1.2] & [0.2, 0.4] & [1.5, 2.5] & [0, 0] \\ [0, 0] & [1.6, 1.8] & [0, 0] & [1, 1] \\ [0, 0] & [0, 0] & [1, 1] & [2.18, 2.3] \\ [0, 0] & [0, 0] & [0, 0] & [1, 1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0, 4] \\ [-6, 2] \\ [7, 12.4] \\ [-7.2, 25.1] \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan$\tilde{U}_x = \tilde{y}$, dengan substitusi mundur maka diperoleh

$\tilde{x}_4 = \frac{\tilde{y}_4}{\tilde{U}_{44}} = \frac{[-7.2,25.1]}{[1,1]} = [-7.2, 25.1].$

$\tilde{x}_3 = \frac{\tilde{y}_3 - \tilde{U}_{34} dual\ \tilde{x}_4}{\tilde{U}_{33}} = \frac{[6.6, 13.4] - [2.18,2.3]\ dual\big[[-7.2,25.1]\big]}{[1, 1]}$

$$= \frac{[6.6\,,13.4] - [2.18,2.3]\;\;[25.1,-7.2,]}{[1\,,1]}$$

$$= [-16.72\,,-3.16].$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{\tilde{y}_2 - \widetilde{U}_{23} dual\; \tilde{x}_{3-} \widetilde{U}_{24} dual\; \tilde{x}_4}{\widetilde{U}_{22}}$$

$$= \frac{[-6\,,2]-[0,0]\; dual\; [-16.72\,,-3.16]-[1,1]\; dual\; [-7.2,25.1]}{[1.6\,,1.8]}$$

$$= \frac{[-6\,,2]-[0,0]\;[\,-3.16,-16.72\,]-[1,1]\;[\,25.1,-7.2]}{[1.6\,,1.8]}$$

$$= [-14.47,0.67].$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{\tilde{y}_1 - \widetilde{U}_{12} dual\; \tilde{x}_{2-} \widetilde{U}_{13} dual\; \tilde{x}_3 - \widetilde{U}_{14} dual\; \tilde{x}_4}{\widetilde{U}_{11}}$$

$$= \frac{[0\,,4]-[0.2,0.4]\; dual\; [-14.47,0.67]-[1.5\,,2.5]\; dual[-16.72\,,-3.16]}{[0.8\,,1.2]} -$$

$$\frac{[0,0]\; dual\; [-7.2,25.1]}{[0.8\,,1.2]}$$

$$= \frac{[0\,,4]-[0.2,0.4]\;[,0.67,-14.4]-[1.5,2.5]\;[\,-3.16,-16.72]-[0,0]\;[25.1,-7.2\,]}{[0.8\,,1.2]}$$

$$= [-13.19,13.09].$$

Jadi nilai $\tilde{x}_1 = [-13.19,13.09]$, $\tilde{x}_2 = [-14.47,0.67]$,

$\tilde{x}_3 = [-16.72\,, -3.16]$, $\tilde{x}_4 = [-7.2, 25.1]$.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, diperoleh hasil penelitian yaitu sistem persamaan linier interval dapat diselesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi LU dengan langkah-langkah yang dijabarkan pada metodologi penelitian. Berdasarkan contoh soal (4.2) dan (4.3) pada bab IV, SPL interval mempunyai solusi tunggal, pada contoh soal (4.2) diperoleh nilai $\tilde{x}_1 = [-3.7, 6.3]$, $\tilde{x}_2 = [-5.5, -2.5]$, dan $\tilde{x}_3 = [2,3]$, untuk contoh soal (4.3) diperoleh $\tilde{x}_1 = [-13.19, 13.09]$, $\tilde{x}_2 = [-14.47, 0.67]$, $\tilde{x}_3 = [-16.72, -3.16]$, dan $\tilde{x}_4 = [-7.2, 25.1]$.

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis menggunakan metode dekomposisi LU untuk menyelesaikan sistem persamaan linear interval, diharapkan bagi pembaca yang berminat dapat menggunakan metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linier interval, seperti metode iterasi Gauss Seidel.

DAFTAR PUSTAKA

A.Goldsztejn, dan G. Chabert , *A Generalized Interval LU Decomposition for the Solution of Interval Linear System*. 2007.

Akbar, Nuh. Dkk. *Algoritma Dollit dan Crout dalam Dekomposisi LU*. 2006.

Anton, Howard, *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta : Erlangga. 2000.

Anton, Howard. and Rorres, Chris.. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Edisi Kedelapan : Erlangga. 2004.

B.T. Polyak dan S.A. Nazin, *Interval Solutions for Interval Algebraic Equations*. 2004.

Goldsztejn, Alexandre Dkk, *On the Aproximation of Linear AE-Solution Sets*. 2006.

Halim, Siana. *Sistem Persamaan Linier dan Matriks.* Teknik Industri UK. Petra Surabaya. 2004.

Lipschutz, Seymour dan Lipson, March Lars. *Aljabar Linear*. Edisi Ketiga. Jakarta : Erlangga. 2006.

Nursukaisih, *Sifat-Sifat Operasi Aritmatika, Determinan dan Invers pada Matriks Interval*. 2012.

Suci Maharani, Dwi dan Suryoto, *Nilai dan Vektor Eigen Matriks Interval atas Aljabar Max-Plu*. 2007.